МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

ЛЕКЦИИ И ЗАДАЧИ

III

СБОРНИК ПОДГОТОВИЛИ:
Э. Б. Винберг, В. Л. Гутенмахер, Е. Б. Дынкин,
Т. И. Кузнецова (художник), И. М. Яглом

ИЗДАТЕЛЬСТВО МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА · 1965

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ М.В.ЛОМОНОСОВА
МЕХАНИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШКОЛА

Лекции и задачи 3

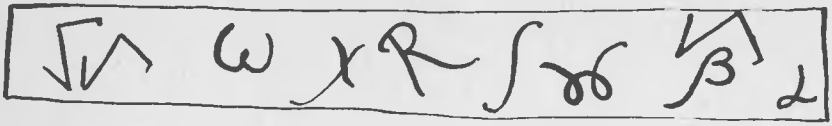
2593

Материал подготовили:

Э.Б.Винберг, В.Л.Гутенмахер, Е.Б.Дынкин, Т.И.Кузнецова/художник/, И.М.Яглом.

Библиотека
Математического
Колледжа НМУ

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1965



В ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЕ

При механико-математическом факультете МГУ работает Вечерняя математическая школа для учащихся 7-II классов московских школ. Руководит работой школы совет, утвержденный правлением Московского математического общества. В его составе доцент И.В.Гирсанов, профессор Е.Б.Дынкин и доцент А.Л.Онищик.

В работе ВМШ могут участвовать все школьники, интересующиеся математикой. Включиться в работу можно в середине учебного года. Вход на все занятия свободный.

В течение октября 1965 года в Вечерней математической школе были прочитаны следующие лекции.

Для 8-ых классов:

профессор В.А.Ефремович, Наглядная неевклидова геометрия / 4 лекции /.

Для 9-II классов: доцент И.В.Гирсанов, Элементы динамического программирования;
профессор Г.Е.Шилов, Математика и музыка;
доцент И.М.Яглом, Математика и генетика.

Занятия для 7-х классов происходят по субботам с I6 до I9 часов в помещении школы № 2 / Ленинский просп., д.58 а. Проезд автобусами №№ III, I08, II9, I44, 57 до остановки "Ленинский проспект", троллейбусами 4 и 33 до остановки "Универмаг Москва"/. Там же занимается одна группа для 6-х классов.

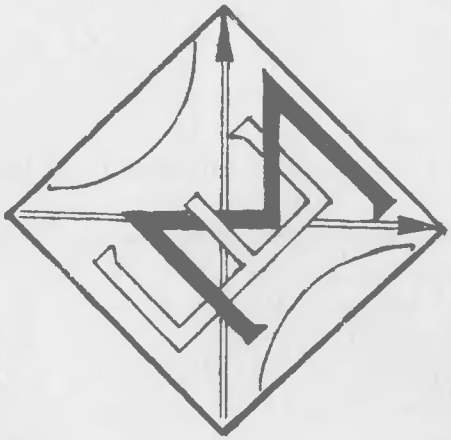
Для 8-х классов лекции читаются по вторникам с I6 до I8 часов в аудитории 0.2 главного здания МГУ на Ленинских горах. Групповые занятия происходят по вторникам с I8 до 20 часов в следующих аудиториях:

Группа А - ауд. I3.I0 главного здания МГУ.

Группа В – ауд.341 а химического ф-та.
Группа С – ауд. 341 б химического ф-та.
Группа D – ауд. 411 химического ф-та.
Группа Е – ауд. 344 химического ф-та.
Группа F – ауд.234 химического ф-та.

Для 9-11 классов лекции читаются по пятницам с 16 до 18 часов в аудитории 0.2 главного здания МГУ. С расписанием групповых занятий можно познакомиться на стенде ВМШ возле ауд.0.2 МГУ.

В конце сборника приводится список руководителей групп для 8-х классов./ Аналогичный список по 7-м классам был помещен в предыдущем выпуске./



КОНКУРС ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

В конкурсе по решению задач могут участвовать все школьники 7–II классов. Письменные решения можно отдавать руководителям групп ВМШ или присылать по адресу : Москва,В–234, Московский университет,механико–математический факультет, к.I2.22, Вечерняя математическая школа.

Приводим новые задачи / начало см. в сборниках I и 2 /.

7–е классы

I3. В квадрате со стороной I5 расположено 20 попарно непересекающихся квадратиков, каждый со стороной I. Доказать, что в большом квадрате можно поместить круг радиуса I так, чтобы он не имел общих точек ни с одним из малых квадратиков.

I4. Груз весом I3,5 тонн упакован в ящики. Каждый ящик весит не более 350 кг. Какое наибольшее число полуторатонных грузовиков может понадобиться для перевозки этого груза? /Запрещается распаковывать ящики и перегружать грузовики/.

I5. Найти все трехзначные числа, которые в I2 раз больше суммы своих цифр.

I6. Доказать, что 23 октября I965 года в кинотеатре "Мир" на первом сеансе присутствовало минимум двое зрителей, имеющих среди сидящих в зале одинаковое число знакомых. /Известно, что в первом ряду сидело 5 человек/.

I7. Стороны треугольника заштрихованы изнутри. Треугольник пересекается несколькими прямыми, каждая из которых заштрихована с одной стороны. Доказать, что найдется многоугольник, все стороны которого заштрихованы изнутри.

I8. Доказать, что число, которое записывается 8I единицами, делится на 8I.

19. Дан квадрат со стороной I. Что представляет собой множество точек, сумма расстояний от которых до всех сторон квадрата равна 3?

20. На доске написано несколько плюсов и минусов. Разрешается стирать любые два знака, приписывая вместо одинаковых знаков плюс, а вместо разных минус. Доказать, что последний оставшийся на доске знак не зависит от того, в каком порядке стирать знаки.

21. При каких n существует замкнутая самопересекающаяся ломаная из n звеньев, пересекающая каждое свое звено ровно один раз?

22. Доказать, что любые 10 точек на плоскости можно разбить на две группы так, чтобы никакая прямая не отделяла одну группу от другой.

23. Даны три точки A, B, C. Провести прямую, пересекающую AC в точке X и BC в точке Y так, чтобы $AX = XY = YB$.

24. Доказать, что если число делится на 99, то сумма его цифр не меньше 18.

25. На шахматной доске, состоящей из 25 х 25 полей, расставлено 125 шашек, по пять шашек на каждой горизонтали. Известно, что расположение шашек симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что хотя бы одна шашка находится на этой диагонали.

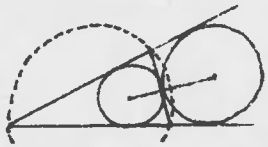
8-е классы

14. Докажите, что если в четырехугольнике АВСД одна из диагоналей / или ее продолжение / рассекает другую диагональ на две равные части, то можно выбрать внутри четырехугольника точку М так, чтобы треугольники АВМ, ВСМ, СДМ, ДАМ имели одинаковые площади. Справедливо ли обратное утверждение?

15. Известно, что $xyz = 1$. Какое значение имеет сумма $\frac{1}{1+x+xy} + \frac{1}{1+y+yz} + \frac{1}{1+z+zx}$?

16. Рассматривается прямоугольная таблица, составленная из $k \times n$ клеток. Под каждым столбцом и возле каждой строки подписано некоторое число. При этом все числа, подписанные под столбцами, составляют в сумме столько же, сколько и все числа, стоящие возле строк. Докажите, что в клетки таблицы можно вписать $k+n-1$ чисел так, чтобы сумма чисел в каждом столбце и в каждой строке была равна числу, сопоставленному этому столбцу или этой строке.

17. Доказать, что в произвольном треугольнике отрезок, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей, делится пополам описанной окружностью.



18. В строчку выписано k чисел. Доказать, что всегда найдутся несколько чисел, стоящие рядом, сумма которых делится на k.

19. На доске нарисовано несколько окружностей, квадратов и треугольников. Разрешается стереть любые две фигуры, нарисовав вместо них третью по правилу: вместо пары окружностей одну окружность, вместо пары квадратов треугольник, вместо пары треугольников квадрат, вместо окружности и квадрата квадрат, вместо окружности и треугольника треугольник, вместо квадрата и треугольника окружность. Доказать, что форма фигуры, которая останется последней, не зависит от того, в каком порядке стираются фигуры.

20. На окружности выписаны в произвольном порядке 4 единицы и 5 нуле* Потом в промежутке между двумя одинаковыми цифрами пишется 1, а между разными 0, а первоначальные цифры стираются. Доказать, что сколько бы раз мы не повторяли этот процесс, мы никогда не получим набор из 9 единиц.

9-11 классы

11. В квадрате со стороной 1 расположено некоторое число отрезков с общей длиной e. Какое наибольшее значение может иметь e, если известно, что никакая прямая не пересекает

одновременно более, чем k отрезков?

12. В примере на умножение все цифры заменены крестиками. Восстановить эти цифры, если известно, что каждая из них имеет одно из значений 2,3,5,7:

$$\begin{array}{r} \times\times\times \\ \times\times \\ \hline \times\times\times\times \\ \times\times\times\times \\ \hline \times\times\times\times\times \end{array}$$

13. Соединяя середины сторон выпуклого шестиугольника через одну, получим два треугольника. Доказать, что точки пересечения медиан этих треугольников совпадают.

14. Найти все действительные корни уравнения

$$(x^{2k}+1)(1+x^2+\ldots+x^{2k-2}) = 2k\,x^{2k-1}$$

/ k – натуральное число/.

15. Даны прямая и две точки по одну сторону от нее. Построить треугольник, основание которого лежит на данной прямой, точка пересечения медиан лежит в одной из данных точек, а точка пересечения высот в другой данной точке.

16. На сторонах четырехугольника построены квадраты. Образован новый четырехугольник с вершинами в центрах этих квадратов. Доказать, что середины диагоналей исходного и нового четырехугольников образуют квадрат.

17. Построить окружность, касательную к двум данным окружностям так, чтобы прямая, проходящая через точку касания, проходила бы через заданную точку.

18. Упростить выражение: $a^{\frac{\lg\lg a}{\lg a}}$.

19. Построим десятичную дробь 0,12345678910111213141..., выписывая подряд все натуральные числа. Подсчитаем сколько раз встречается среди первых N цифр комбинация 12345. Поделим это число на N. Найти предел полученного отношения при N, стремящемся к бесконечности.

20. В треугольнике ABC сторона AB равна стороне AC. Найти

геометрическое место точек M, для которых выражение MB +MC- -MA имеет минимальное значение.

ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ЭКЗАМЕНАМ ПО МАТЕМАТИКЕ

Для того, чтобы помочь вам приготовиться получше к выпускным экзаменам в школе и к поступлению в высшую школу, мы помещаем задачи, предлагавшиеся на письменном экзамене по математике на механико-математическом факультете МГУ в 1965 году. Каждый из семи вариантов содержит по четыре задачи. На их решение абитуриентам давалось 4 часа.

---

1. Расстояние между двумя городами A и B пассажирский поезд проходит на 4 часа быстрее товарного поезда. Если бы каждый из поездов шел то время, которое тратит другой поезд на путь от A до B, то пассажирский поезд прошел бы на 280км. больше, чем товарный. Если бы скорость каждого из поездов была увеличена на 10 км/час, то в этом случае пассажирский поезд проходил бы расстояние AB на 2 часа 24 минуты быстрее товарного поезда. Найти расстояние между городами A и B.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. Через точки A, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

3. Решить неравенство

$$\log_x [\log_2 (4^x - 6)] \leq 1.$$

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x + \cos y + \cos (x+y) = 3/2$$

---

1. Из города A в город B через равные промежутки времени и с равной скоростью выезжает один за другим 21 автобус, каждый из которых проходит путь AB за 2 часа 40 мин. При этом первый автобус прибывает в город B в тот момент, когда из города A выезжает 21-й автобус. Прибыв в город B, каждый автобус мгновенно поворачивает и двигается обратно к городу A.

Из города А одновременно с 21-м автобусом выезжает в город В легковая машина, которая через t минут обгоняет 20-й автобус. Найти t и время, за которое легковая машина преодолевает расстояние АВ, если, встретив первый автобус, легковая машина после этого встречает второй автобус через $t-9$ минут.

Примечание. Автобусы занумерованы в том порядке, в каком они выезжают из города А.

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра BA взята точка M так, что $MA=AB$ /$MB=2AB$/. Через точки M, B' и середину ребра AC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

3. Решить неравенство

$$\log_2(\sqrt{x+3}-x-1)\le 0.$$

4. Найти все пары чисел x, y, которые удовлетворяют уравнению

$$\left(\sin^2 x+\frac{1}{\sin^2 x}\right)^2+\left(\cos^2 x+\frac{1}{\cos^2 x}\right)^2=12+\frac{1}{2}\sin y.$$

I. Города А и В расположены на берегу реки, причем город В расположен ниже по течению. В 9 часов утра из города А в город В отправляется плот, плывущий относительно берегов со скоростью течения реки. В этот же момент из города В в город А отправляется лодка, которая встречается с плотом через 5 часов. Доплыв до города А, лодка мгновенно повернула обратно и приплыла в город В одновременно с плотом. Успели ли лодка и плот прибыть в город В к 9 часам вечера / того же дня?/.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CB взята точка M так, что $MB=\frac{1}{2}BC$ $(MC=\frac{3}{2}BC)$. Через точку M и середины ребер AB и SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\left(\frac{4x-5}{|x-2|}\right) \geq \frac{1}{2}.$$

4. Найти все решения уравнения

$$\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 3x = \sin x \cdot \sin^2 3x$$

I. Два автобуса выезжают одновременно навстречу друг другу - один из пункта А в пункт В, а другой из пункта В в пункт А, и встречаются в I2 часов дня. Если скорость первого автобуса увеличить в два раза, а скорость второго оставить прежней, то встреча произойдет на 56 минут раньше. Если же, напротив, увеличить в два раза скорость второго автобуса, оставив прежней скорость первого, то встреча произойдет на 65 мин. раньше. Определить время встречи автобусов в случае, если увеличены вдвое скорости обоих автобусов.

2. Дана правильная четырехугольная пирамида $SABCD$ с вершиной S. На продолжении ребра CD взята точка M так, что $MD = 2DC$ $(MC = 3DC)$. Через точки M, B и середину ребра SC проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем пирамиды?

3. Решить неравенство

$$4^x \leq 3 \cdot 2^{\sqrt{x}+x} + 4^{1+\sqrt{x}}$$

4. Найти все пары чисел a, b, для которых всякая пара чисел x, y $(x \neq \frac{\pi}{2}+n\pi, y \neq \frac{\pi}{2}+m\pi$, где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, удовлетворяющая уравнению $x+y=a$, удовлетворяет также уравнению

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b.$$

I. Школьник затратил некоторую сумму денег на покупку портфеля, авторучки и книги. Если бы портфель стоил в 5 раз дешевле, авторучка - в 2 раза дешевле, а книга - в 2,5 раза дешевле, то та же покупка стоила бы 8 рублей. Если бы по сравнению с первоначальной стоимостью портфель стоил в 2 раза дешевле, авторучка - в 4 раза дешевле, а книга - в 3 раза дешевле, то за ту же покупку школьник уплатил бы I2 руб.

Сколько стоит покупка и за что было уплачено больше: за портфель или за авторучку?

2. Дана правильная треугольная призма $ABCA'B'C'$ с боковыми ребрами AA', BB' и CC'. На продолжении ребра $A'B'$ взята точка M так, что $B'M=\frac{1}{2}A'B'(A'M=\frac{3}{2}A'B')$ Через точку M и середины ребер $A'C'$ и $B'B$ проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?

3. Решить неравенство

$$\log_3 \frac{|x^2-4x|+3}{x^2+|x-5|} \geq 0.$$

4. Сколько решений на отрезке $0 \leq x \leq \pi$ имеет уравнение

$$\sin x + 2\sin 2x = 3 + \sin 3x\,?$$

I. Города А и В расположены на берегу реки, причем город А расположен ниже по течению. Из этих городов одновременно выходят навстречу друг другу две лодки, которые встречаются посередине между городами А и В. Продолжив свой путь после встречи в прежних направлениях и достигнув соответственно городов В и А, лодки мгновенно поворачивают обратно и встречаются вновь на расстоянии 20 км. от места первой встречи. Если бы те же лодки, выйдя одновременно из городов А и В, поплыли бы обе против течения, то лодка вышедшая из А, догнала бы лодку, вышедшую из В, в 150 км. от В. Найти расстояние между городами А и В.

2. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с боковыми ребрами AA', BB', CC' и DD'. На продолжении ребер AB, AA', AD отложены соответственно отрезки BP, $A'Q$, DR длины $1,5AB$ ($AP=AQ=AR=2,5AB$). Через точки P, Q и R проведена плоскость, В каком отношении эта плоскость делит объем куба?

3. Решить неравенство

$$\log_x 2x \leq \sqrt{\log_x (2x^3)}.$$

4. Найти все пары чисел x, y , которые удовлетворяют уравнению

$$tg^4x + tg^4y + 2ctg^2x \cdot ctg^2y = 3 + \sin^2(x+y).$$

I. У школьника была некоторая сумма денег монетами достоинством в I5 коп. и 20 коп, причем двадцатикопеечных монет было больше, чем пятнадцатикопеечных.

Пятую часть всех денег школьник истратил, отдав две монеты за билет в кино. Половину оставшихся у него денег он отдал за обед, оплатив его тремя монетами. Сколько монет каждого достоинства было у школьника вначале?

2. В треугольной пирамиде все плоские углы при вершине прямые. Доказать, что вершина пирамиды, точка пересечения медиан основания и центр описанного вокруг пирамиды шара лежат на одной прямой.

3. Решить уравнение

$$|3^x - 2\cdot 3^{-x}|\log_4(x+2) - \log_2 x = 1$$

4. Найти все такие числа p , при которых уравнение

$$1 + p\sin x = p^2 - \sin^2 x$$

имеет решение.

Е.Б.ДЫНКИН

Лекционный курс математики в IO-х классах

Тема 2. Площади и объемы.

§ I. Основные принципы.

Чтобы не рассматривать отдельно площади плоских фигур и объемы пространственных тел, мы будем изучать сразу общее понятие n - мерного объема. Этот общий подход хорош еще и тем, что побуждает нас заново пересмотреть все, что узнавалось в разное время и на разном уровне строгости о площадях и объемах.

Пусть A - тело в n - мерном евклидовом пространстве. Его n - мерный объем обозначим через $V_n(A)$. Значениями $V_n(A)$ могут служить любые неотрицательные числа, а также символ $+\infty$. В основе измерения объемов лежат следующие основные принципы.

Принцип аддитивности. Если тело A разбито на два тела A_1 и A_2, то $V_n(A)=V_n(A_1)+V_n(A_2)$.

Принцип инвариантности. Если два тела конгруентны, то их объемы равны.

Выбор единиц объема делается с помощью следующего предположения:

Нормирующее условие. Для n - мерного единичного куба Q_n *)

$$V_n(Q_n)=1 \qquad /1/$$

Принцип аддитивности и инвариантности широко используется при вычислении площадей в начальном курсе геометрии. Именно с помощью этих принципов параллелограммы сводятся к прямо-

---

*) Пусть $e_1,\dots,e_n$ - ортонормированный базис и c -произвольный вектор. Множество всех точек вида $t_1e_1+\dots+t_ne_n+c$ $(0\le t_1\le 1,\dots,\ 0\le t_n\le 1)$ называется n -мерным единичным кубом. Все такие кубы конгруентны.

угольникам, треугольники к параллелограммам, многоугольники к треугольникам. Уточняя принцип аддитивности, мы будем теперь считать, что тело A разбито на два тела A_1 и A_2, если каждая точка тела A принадлежит одному и только одному из тел A_1, A_2 */.

Из принципа аддитивности вытекает.

Монотонность объема. Если $A \subseteq B$, то $v_n(A) \leq v_n(B)$.

В элементарной геометрии рассматриваются только очень простые тела: многогранники, шары, конусы и их пересечения. Однако, объемы можно вычислять и для гораздо более сложных множеств. Помимо принципов аддитивности и инвариантности при этом используется

Принцип непрерывности. Если $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots \subseteq A_k \subseteq \ldots$ $\bigcup A_k$ – объединение всех множеств A_k, то

$$v_n(A) = \lim_{k \to \infty} v_n(A_k)$$

/ Из монотонности объема следует, что последовательность $v_n(A_k)$ не убывает. Поэтому она обязательно сходится к конечному или бесконечному пределу. Принцип непрерывности требует, чтобы этот предел совпадал с $v_n(A)$ ./

Пользуясь сформулированными принципами, можно вычислить объемы очень широкого класса множеств. Точнее, можно: а/ построить некоторый класс множеств, включающий все открытые и замкнутые множества и содержащий вместе с каждым множеством его дополнение и вместе с каждой последовательностью множеств их сумму и пересечение; б/ задать на этом классе мно-

---

*/ Это не совсем то, что понимают под разбиением в элементарной геометрии. Например, когда разбивают диагональю параллелограмм на два треугольника, то получают треугольники с общей стороной. Однако, площадь отрезка равна нулю. Поэтому не изменяя площади треугольника, можно выбросить из него сторону, общую с другим треугольником, и получить разбиение в нашем уточненном смысле.

жеств функцию $V_n(A)$, удовлетворяющую принципам аддитивности, инвариантности, непрерывности и нормирующему условию /I/. Множества упомянутого класса называются измеримыми, а значение называется $V_n(A)$ / n-мерной / мерой Лебега множества A. Мы будем употреблять слова "измеримое множество" и "тело", а также слова "объем" и "мера" как синонимы.

Доказано, что принципы аддитивности, инвариантности и непрерывности вместе с нормирующим условием /I/ определяют функцию $V_n(A)$ однозначно.

Выведем некоторые простые следствия из основных принципов.

I. Если $A \subseteq A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m$, то $V_n(A) \leq V_n(A_1) + \ldots + V_n(A_m)$. /Это выводится из аддитивности и монотонности, если заметить, что $A_2 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m = B \cup C$, где $B = A_1 \cup \ldots \cup A_{m-1}$ и C -совокупность всех точек множества A_m, не принадлежащих множеству B./

2. Если тело ограничено, то его объем конечен./Ибо ограниченное тело можно покрыть конечным числом единичных кубов/.

3. n-мерный объем $n-1$ - мерного единичного куба равен нулю. /Ибо в единичном n-мерном кубе можно поместить сколько угодно попарно непересекающихся единичных $n-1$-мерных кубов/.

4. n - мерный объем всякого ограниченного подмножества гиперплоскости равен нулю / по причинам, указанным в п.2/.

5. n - мерный объем произвольной гиперплоскости равен нулю / Но принципу непрерывности, ибо гиперплоскость можно получить как сумму возрастающей последовательности ограниченных множеств/.

6. Если $V_n(A \cap B) = 0$, то $V_n(A \cup B) = V_n(A) + V_n(B)$. /Ибо $V_n(A \cup B) = V_n(A) + V_n(B \setminus A \cap B)$ и $V_n(B) = V_n(B \setminus A \cap B) + V_n(A \cap B)$./

§ 2. Объем прямого цилиндра.

В n - мерном евклидовом пространстве V рассмотрим $n-1$ - мерное подпространство P. Пусть B множество, лежащее в P, q - вектор, ортогональный P и $t_1 < t_2$ два действительных числа. Множество точек вида

$f + tg$, где $f \in B, t_1 \le t \le t_2$ называется прямым цилиндром с основанием B и высотой $[t_1, t_2]$. Обозначим это множество через $B \times [t_1, t_2]$ или короче $C(t_1, t_2)$.

Заметим, что

$$C(t_1, t_2) = C(0, t_2 - t_1) + t_1 g$$

Положим $v_n[C(0,t)] = f(t)$. По принципу инвариантности

$$v_n[C(t_1, t_2)] = v_n[C(0, t_2 - t_1)] = f(t_2 - t_1)$$

Пусть $s > 0, t > 0$. Цилиндры $C(0,s)$ и $C(s, s+t)$ составляют в сумме цилиндр $C(0, s+t)$, а их пересечение лежит в гиперплоскости и, следовательно, имеет объем нуль /см.§I,5/. Поэтому / см.§I,6/

$$v[C(0, s+t)] = v[C(0,s)] + v[C(s, s+t)]$$

или

$$f(s+t) = f(s) + f(t).$$

Следовательно, f - аддитивная функция. Из монотонности объемов вытекает, что $f(t) \le f(1)$ при $t \le 1$. Как мы знаем отсюда следует, что $f(t) = ct$, где c - постоянная /зависящая от B/. Заметим, что

$$c(B) = v_n\{B \times [0,1]\}$$

Отсюда видно, что функция $c(B)$ определенная на измеримых множествах $n-1$ - мерного пространства P удовлетворяет принципам аддитивности, инвариантности и непрерывности и нормирующему условию /I/. По теореме единственности $c(B) = v_{n-1}(B)$.

Мы доказали следующую теорему:

n - мерный объем прямого цилиндра с основанием B и высотой $[t_1, t_2]$ равен произведению $n-1$ -мерного объема основания на длину $t_2 - t_1$ высоты.

Замечание. При $n = 1$ наши рассуждения показывают, что $v_1[t_1, t_2] = t_2 - t_1$.

Следствие. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению длин его ребер.

В самом деле, n -мерный прямоугольный параллелепипед можно рассматривать как цилиндр, основанием которого служит $n-1$ - мерный прямоугольный параллелепипед, а высотой одно из ребер.

§ 3. Объемы подобных тел.

Преобразование n -мерного пространства, задаваемое формулой $F(x)=\lambda x$, называется гомотетией с коэффициентом λ / из точки 0/. Два тела называются подобными, если одно из них можно получить из другого с помощью движений и гомотетии.

Теорема. При гомотетии с коэффициентом λ n -мерный объем каждого тела умножается на λ^n .

Заметим, что при гомотетии сохраняется конгруентность /т.е. если A конгруентно B , то λA конгруентно λB /. Поэтому функция $c(A)=\lambda^{-n}V_n(\lambda A)$ удовлетворяет принципу инвариантности. Очевидно, она удовлетворяет также принципам аддитивности и непрерывности и нормирующему условию /I/ / последнее потому, что λQ_n - прямоугольный параллелепипед с длинами ребер, равными λ /. По теореме единственности $c(A)=V_n(A)$.

§ 4. Объем шара.

n -мерный шар радиуса R с центром в точке x_0 определяется как множество всех точек x для которых $|x-x_0|\le R$. Будем обозначать его через $\mathcal{U}(x_0,R)$.

Заметим, что $\mathcal{U}(x_0,R)=R\mathcal{U}(0,1)+x_0$. Поэтому объем $\mathcal{U}(\cdot,R)$ равен $R^n\alpha_n$, где α_n - объем n - мерного шара радиуса I. Значения α_n будут вычислены позже.

§5. Вычисление объемов с помощью интегрирования.

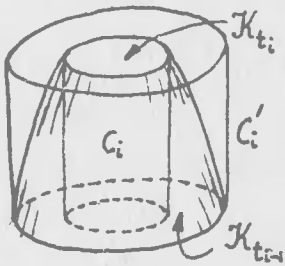
Выберем в n - мерном евклидовом пространстве какой-нибудь ортонормированный базис $e_1,\dots,e_n$ и будем обозначать через $x_1,x_2,\dots,x_n$ координаты вектора x по этому базису. Обозначим через $\mathcal{K}_t$ пересечение тела $\mathcal{K}$ с гиперплоскостью $x_n=t$ и через $\mathcal{K}(a,b)$ пересечение $\mathcal{K}$

с "полосой" $a \le x_n \le b$. Положим $v(t) = v_{n-1}(\mathcal{K}_t)$.

При широких предположениях справедлива формула

$$v_n\{\mathcal{K}(a,b)\} = \int_a^b v(t)\,dt. \qquad /2/$$

Чтобы вывести эту формулу, предположим сначала, что: а/функция $v(t)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;б/ если $a \le t_1 < t_2 \le b$ и если $f + t_2 e_n \in \mathcal{K}$, то $f + t_1 e_n \in \mathcal{K}$.



Рассмотрим произвольное разбиение $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ отрезка $[a,b]$ и образуем прямые цилиндры $C_i = \mathcal{K}_{t_i} \times [t_{i-1}, t_i]$ и $C_i' = \mathcal{K}_{t_{i-1}} \times [t_{i-1}, t_i]$. В силу условия б/ $C_i \subseteq \mathcal{K}(t_i, t_{i-1}) \subseteq C_i'$. Поэтому $v_n(C_i) \le v_n\{\mathcal{K}(t_{i-1}, t_i)\} \le v_n(C_i')$ и

$$s \le v_n\{\mathcal{K}(a,b)\} \le S, \qquad /3/$$

где $s = \sum_{i=1}^{m} v_n(C_i)$, $S = \sum_{i=1}^{m} v_n(C_i')$

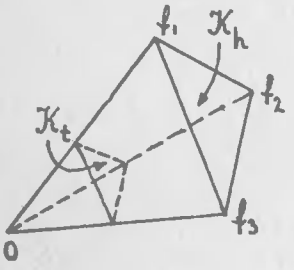
Но по теореме § 2 $v_n(C_i) = v(t_i)(t_i - t_{i-1})$, $v_n(C_i') = v(t_{i-1})(t_i - t_{i-1})$.

В силу б/ минимум функции $v(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ равен $v(t_i)$, а максимум равен $v(t_{i-1})$. Поэтому s и S суть, соответственно, нижняя и верхняя суммы Дарбу для интеграла $\int_a^b v(t)\,dt$. Из неравенств /3/ по определению интеграла имеем равенство /2/.

Аналогично доказывается формула /2/ и в случае, когда вместо условия б/ выполняется следующее условие: б'/ если $a \le t_1 < t_2 \le b$ и если $f + t_1 e_n \in \mathcal{K}$, то $f + t_2 e_n \in \mathcal{K}$. Ясно, что формула /2/ справедлива и в более общем случае, когда отрезок $[a,b]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых выполнено условие б/ или условие б'/.

§ 6. Объем симплекса.

Рассмотрим n – мерный симплекс K с вершинами $0, f_1, \dots, f_n$. Выберем ортонормированный базис $e_1, \dots, e_n$ так, чтобы векторы $e_1, \dots, e_{n-1}$ лежали в подпространстве, натянутом на разности $f_i - f_n$ $(i=1,2,\dots,n-1)$. Тогда $(f_1, e_n)=(f_2, e_n)=\dots=(f_n, e_n)=h$, где h – расстояние 0 до линейного многообразия, проходящего через $f_1, \dots, f_n$ /докажите это/. Естественно назвать h высотой симплекса K. Сечение K_t симплекса K плоскостью $x_n=t$ есть $n-1$ –мерный симплекс с вершинами $\frac{t}{h} f_1, \dots, \frac{t}{h} f_n$. В силу § 3 $n-1$-мерный объем этого сечения $v(t)=\left(\frac{t}{h}\right)^{n-1} c$, где c – $n-1$ –мерный объем симплекса с вершинами $f_1, \dots, f_n$. По формуле /2/ имеем

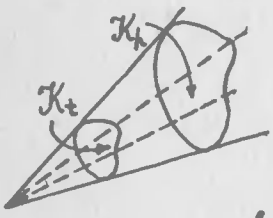


$$V_n(K)=\int_0^h v(t)dt=\int_0^h \left(\frac{t}{h}\right)^{n-1} c\,dt=\frac{c}{h^{n-1}}\int_0^h t^{n-1}dt=\frac{c}{h^{n-1}}\frac{t^n}{n}\Big|_0^h=\frac{ch}{n}$$

Итак, n – мерный объем n –мерного симплекса равен одной n – ой от произведения $n-1$ –мерного объема основания на высоту.

При $n=2$ получаем формулу для площади треугольника, а при $n=3$ формулу для объема тетраедра / трехгранной пирамиды/.

§ 7. Объем конуса.



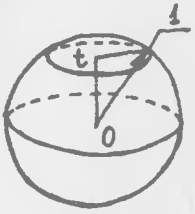
Рассмотрим произвольное тело, которое вместе с точкой x содержит все точки λx при $\lambda \geq 0$. Сечение K_t и K_h такого тела K связаны формулой $K_t=\frac{t}{h} K_h$. По теореме §3 имеем $v(t)=\left(\frac{t}{h}\right)^{n-1} v(h)$. Подставляем это в /2/, находим, что

$$V_n\{K(0,h)\}=\int_0^h v(t)dt=\frac{v(h)h}{n}.$$

Тело $K(0,h)$ мы будем называть n -мерным конусом, сечение K_h - его основанием, а h высотой. Итак, n -мерный объем n -мерного конуса равен одной n -ой от произведения $n-1$ - мерного объема основания на высоту.

Этот результат применим , в частности к обычному круговому конусу в трехмерном пространстве, а также к любым пирамидам.

§ 8. Объем шара.



Сечение шара n -мерного $Ш(0,1)$ гиперплоскостью $x_n = t$ является $n-1$ -мерным шаром радиуса $\sqrt{1-t^2}$. Согласно § 3 $n-1$ - мерный объем этого сечения равен $\alpha_{n-1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}$.По формуле /2/ n -мерный объем единичного шара $Ш(0,1)$ выражается формулой

$$\alpha_n = \alpha_{n-1}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt = 2\alpha_{n-1}\int_{0}^{1}(1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}dt. \quad /4/$$

Заменяя переменную по формуле $t=\cos x$, получим

$$\alpha_n = 2\alpha_{n-1}\int_{0}^{\pi/2}\sin^n x\,dx \quad /5/$$

Отсюда

$$\alpha_2 = 2\alpha_1\int_{0}^{\pi/2}\sin^2 x\,dx = \alpha_1\int_{0}^{\pi/2}(1-\cos 2x)dx = \alpha_1\left(x-\frac{\sin 2x}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}\alpha_1 = \pi$$

ибо, как легко видеть, $\alpha_1 = 2$. По формуле /4/

$$\alpha_3 = 2\alpha_2\int_{0}^{1}(1-t^2)\,dt = 2\pi\left(t-\frac{t^3}{3}\right)\Big|_0^1 = \frac{4}{3}\pi.$$

Далее, заметим, что

$$(\sin^{n-1}x\cos x)' = (n-1)\sin^{n-2}x - n\sin^n x.$$

Поэтому

$$(n-1)\int_{0}^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx - n\int_{0}^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \sin^{n-1}x\cos x\Big|_0^{\pi/2} = 0$$

и

$$\int_{0}^{\pi/2}\sin^n x\,dx = \frac{n-1}{n}\int_{0}^{\pi/2}\sin^{n-2}x\,dx.$$

В силу /5/ $\frac{\alpha_n}{\alpha_{n-1}} = \frac{\alpha_{n-2}}{\alpha_{n-3}} \cdot \frac{n-1}{n}$.

Используя уже известные значения $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ получаем

$$\alpha_4 = \frac{\pi^2}{2}, \quad \alpha_5 = \frac{4}{15}\pi^2, \ldots$$

Нетрудно доказать по индукции, что

$$\alpha_{2k} = \frac{\pi^k}{k!}, \quad \alpha_{2k+1} = \frac{2(2\pi)^k}{1 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (2k+1)}$$

Контрольные задачи.

1. Доказать, что если тела $A_1, A_2, \ldots, A_m, \ldots$ попарно не пересекаются, то

$$V_n(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m \cup \ldots) = V_n(A_1) + V_n(A_2) + \ldots + V_n(A_m) + \ldots$$

2. Доказать, что для любых трех тел A, B, C

$$V_n(A \cup B \cup C) = V_n(A) + V_n(B) + V_n(C) - V_n(A \cap B) - V_n(B \cap C) - V_n(C \cap A) + V_n(A \cap B \cap C).$$

3. Как меняется n -мерный объем при преобразовании n - мерного евклидова пространства, определяемом в декартовой прямоугольной системе координат формулами

$$x_1' = \lambda_1 x_1, \quad x_2' = \lambda_2 x_2, \ldots, x_n' = \lambda_n x_n \quad ?$$

4. Найти площадь, ограниченную кривыми $ay = x^2$, $ax = y^2 (a > 0)$.

5. Вычислить n - мерный объем симплекса с вершинами $0, a_1 e_1, a_2 e_2, \ldots, a_n e_n$ / $e_1, e_2, \ldots, e_n$ - ортонормированный базис, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ - положительные числа /.

6. Вычислить n -мерный объем правильного n -мерного симплекса с ребром a .

7. Найти объем усеченного конуса, основания которого суть круги с радиусами $r < R$, а высота равна h .

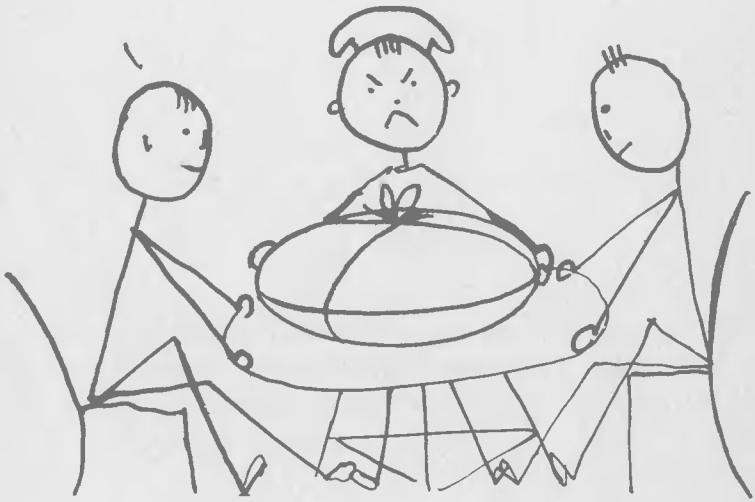
8. Найти n -мерный объем конуса $x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 \le x_n^2 \le h^2$

9. Найти объем шарового слоя $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, $h_1 \le z \le h_2$.

10. Найти объем тора, получающегося от вращения круга радиуса r вокруг оси, отстоящей от центра на расстоянии $R > r$.

11. Найти объем эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1.$$



бесконечной геометрической прогрессии:

$$1+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots \quad . \qquad /5/$$

Для этого ряда

$$S_n=1+x+x^2+\ldots+x^{n-1}=\frac{1-x^n}{1-x},$$

откуда видно, что он сходится тогда и только тогда, когда $|x|<1$, и в этом случае его сумма равна $\frac{1}{1-x}$.

Теорема 4. /Сравнение рядов/ Пусть

$$c_1+c_2+\ldots+c_n+\ldots \quad — \qquad /6/$$

сходящийся ряд с положительными членами. Если $|a_n|\le c_n$ для всех n, то ряд /4/ также сходится, и его сумма по абсолютной величине не превосходит суммы ряда /6/.

С помощью этой теоремы можно доказать сходимость ряда

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \qquad /7/$$

при любом x. Для этого выберем натуральное число $m>|x|$. Отбрасывая первые m членов ряда /7/, получаем ряд

$$\frac{x^m}{m!}+\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}+\frac{x^{m+2}}{(m+2)!}+\ldots, \qquad /8/$$

члены которого можно оценить следующим образом:

$$\left|\frac{x^{m+n}}{(m+n)!}\right|\le\frac{|x|^m}{m!}\left(\frac{|x|}{m}\right)^n=c_n.$$

Так как ряд из c_n сходится, и его сумма равна

$$r_m=\frac{|x|^m}{m!}\left(1+\frac{|x|}{m}+\left(\frac{|x|}{m}\right)^2+\ldots\right)=\frac{|x|^m}{m!\left(1-\frac{|x|}{m}\right)},$$

то ряд /8/ также сходится, и его сумма по абсолютной величине не превосходит r_m. Поэтому ряд /7/ также сходится. Его сумма S равна частичной сумме S_m плюс сумма ряда /8/. Отсюда получается такая оценка:

$$|S-S_m|\le\frac{|x|^m}{m!\left(1-\frac{|x|}{m}\right)}. \qquad /9/$$

Вычислим с точностью до 0,01 сумму ряда /7/ при $x=1$.

Из /9/ видно, что для этого достаточно взять первые 6 членов ряда:

$$s \approx 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120} \approx 2,72.$$

§ 5.

Выше было определено число $e=\lim(1+\frac{1}{n})^n$. Если k - какое-нибудь натуральное число, то

$$\lim\left(1+\frac{k}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{k}{kn}\right)^{kn}=e^k.$$

Теорема 5. При любом действительном x предел $\lim(1+\frac{x}{n})^n$ существует и равен сумме ряда /7/.

Доказательство основано на тождестве

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{x^2}{2!}+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{x^3}{3!}+\ldots+$$

$$+\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{x^n}{n!}. \qquad /10/$$

Введем обозначение

$$e^x=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots. \qquad /11/$$

Из оценки /9/ при $m=1$ следует, что если $|x|<1$, то

$$|e^x-1|\le\frac{|x|}{1-|x|}. \qquad /12/$$

Лемма. Если $\lim a_n=0$, то $\lim\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n=1$.

С помощью /10/, /11/ и /12/ получаем:

$$\left|\left(1+\frac{a_n}{n}\right)^n-1\right|\le\left(1+\frac{|a_n|}{n}\right)^n-1\le e^{|a_n|}-1\le$$

$$\le\frac{|a_n|}{1-|a_n|}\longrightarrow 0.$$

Теорема 6. $e^{x+y}=e^x e^y$

Доказательство:

$$e^{x+y}=\lim\left(1+\frac{x+y}{n}\right)^n=\lim\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{y}{n}\right)^n\left(1-\right.$$

$$\left.-\frac{xy}{(n+x)(n+y)}\right)^n.$$

Так как $a_n = -\frac{nxy}{(n+x)(n+y)} \to 0$, то можно применить лемму и получить нужный результат.

Функция e^x называется экспонентой, или показательной функцией, с основанием e. При изменении x от $-\infty$ до $+\infty$ она возрастает, принимая ровно по одному разу все положительные значения. Последнее утверждение не так трудно доказать имеющимися средствами, но мы не будем этого делать, потому что оно является простым следствием общих теорем о непрерывных функциях, которые будут доказываться несколько позже.

Пусть $x > 0$. Число u, для которого $e^u = x$, обозначается через $\ln x$ и называется натуральным логарифмом числа x. Таким образом, по определению $e^{\ln x} = x$. Из теоремы 6 следует, что

$$\ln xy = \ln x + \ln y \qquad /13/$$

Показательную функцию с произвольным основанием можно определить, например, так: $a^x = e^{x \ln a}$. Если $x > 0$, то число u, для которого $a^u = x$, обозначается через $\log_a x$ и называется логарифмом числа x по основанию a. Очевидно, что

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} \quad (a \neq 1).$$

Контрольные задачи.

Из книги " Задачи по элементарной математике" / см. литературу в конце/ - задачи 112, 116/кроме з/, и//, 120/кроме в//, 121-127, 131, 133, 134 /кроме д//, 135-139, 145, 147, 148; контрольные задачи 35, 36, 38. Сверх этого, следующие задачи.

1. Доказать, что аксиома Архимеда эквивалентна тому, что нет действительного числа, которое было бы больше всех натуральных.

2. Доказать, что $a = \lim a_n$ тогда и только тогда, когда

для любого $\varepsilon > 0$ вне ε-окрестности числа a находится лишь конечное число членов последовательности $\{a_n\}$.

3. Доказать, что число a является предельной точкой последовательности $\{a_n\}$ тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в ε- окрестности числа a лежит бесконечное число членов этой последовательности / не исключено, что некоторые из них, или даже все, равны/.

4. Доказать, что если a - единственная предельная точка ограниченной последовательности $\{a_n\}$, то a - предел этой последовательности.

5. Доказать, что если a - предельная точка для всякой подпоследовательности последовательности $\{a_n\}$, то a - предел этой последовательности.

6. Доказать, что если существуют $\lim a_{2n}$, $\lim a_{2n-1}$, $\lim a_{3n}$ то существует $\lim a_n$.

7. Последовательность $\{a_n\}$ сходится, а последовательность $\{b_n\}$ расходится. Что можно сказать о сходимости последовательностей $\{a_n + b_n\}$ и $\{a_n b_n\}$?

8. Пусть $a_n \le b_n \le c_n$ при всех n. Доказать, что если $\lim a_n = \lim c_n = u$, то $\lim b_n$ существует и равен u.

9. Доказать, что если $\lim a_n = a$, то $\lim \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ существует и равен a.

10. Первые два члена последовательности равны 0 и 1, а каждый следующий член равен попеременно то среднему арифметическому, то среднему геометрическому двух предыдущих. Доказать, что эта последовательность имеет предел. / Можно доказать, что он равен $2/\pi$ /

11. Дано, что $\lim \frac{u_n}{a_n} = \lim \frac{v_n}{a_n} = 0$. Доказать, что если хотя бы один из пределов $\lim \frac{a_n}{b_n}$ и $\lim \frac{a_n + u_n}{b_n + v_n}$ существует, то существует и другой, и они равны.

12. Пусть $\lim a_n = a$. Доказать, что

а/ $\lim |a_n| = |a|$;

б/ $\lim e^{a_n} = e^a$;

Э.Б.ВИНБЕРГ

Лекционный курс математики в 9 - х классах

Пределы

§ I.

В теории действительных чисел, как и в геометрии, можно сформулировать небольшое число аксиом, следствиями которых являются все утверждения этой теории.

Система аксиом для действительных чисел может быть, например, следующей. Мы считаем, что действительные числа суть некоторые объекты, которые можно "складывать" и "умножать" и что определено свойство числа быть "положительным".

I. Действительные числа образуют поле.

II. /II I/ Для каждого числа a имеет место ровно одна из следующих возможностей: $a=0$, a положительно, $(-a)$ положительно.

/II 2/ Если a, b положительны, то $a+b$ и ab положительны.

Для формулировки дальнейших аксиом удобно дать такое определение: $a>b$ / a больше b /, если число $a-b$ положительно.

III. /Аксиома Архимеда/. Если a -положительное число, то для любого b найдется такое натуральное число n, что

$$na = \underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ раз} > b$$

IV. /Аксиома полноты/. Пусть

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_n \le \ldots,$$

$$b_1 \ge b_2 \ge b_3 \ge \ldots \ge b_n \ge \ldots,$$

причем $a_n \le b_n$ при всех n. Тогда существует такое действительное число c, что $a_n \le c \le b_n$ при всех n.

Если представлять действительные числа точками на числовой оси, то аксиома полноты означает, что для любой последовательности вложенных друг в друга отрезков имеется общая точка.

Физическим прообразом понятия действительного числа является результат измерения / физический прообраз натурального числа - результат счета/.

Натуральные числа можно считать частным случаем действительных, если положить

$$n = \underbrace{I + I + \ldots + I}_{n \text{ раз}}$$

В правой части этого равенства I обозначает единицу поля действительных чисел, которая, таким образом, отождествляется с единицей натурального ряда.

С другой стороны, система действительных чисел может быть построена, исходя из натурального ряда / см. выпуск 2 сборника/. Эта конструкция представляет большой интерес с точки зрения оснований математики, но для дальнейшего она нам не понадобится.

§ 2.

Число a назнвается <u>пределом</u> последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots , \qquad /I/$$

если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n_0, что

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

при всех $n \geq n_0$. Обозначение: $\lim a_n = a$ или $a_n \to a$. Последовательность , имеющая предел, называется <u>сходящейся</u>.

Если из последовательности /I/ можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся к a , то a называется <u>предельной точкой</u> последовательности /I/ .Предел сходящейся последовательности является для нее единственной предельной точкой. В частности, никакая последовательность не может иметь двух разных пределов.

Если назвать <u>ε- окрестностью</u> числа a совокупность всех x , для которых $|x-a| < \varepsilon$, то определение предела можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности /I/, если для каждого $\varepsilon > 0$ все

члены последовательности , начиная с некоторого, содержатся в ε-окрестности a . Легко доказать, что a будет предельной точкой последовательности /I/, если для любого $\varepsilon > 0$ в ε-окрестности a содержится бесконечное число членов последовательности.

Последовательность /I/ называется ограниченной, если существуют такие числа c_1 и c_2 , что $c_1 \le a_n \le c_2$ при всех n .

Теорема I. Всякая ограниченная последовательность имеет предельную точку.

Последовательность /I/ называется фундаментальной, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое натуральное число n_0 , что

$$|a_n - a_{n_0}| < \varepsilon$$

при всех $n \ge n_0$.

Теорема 2. /Критерий Коши/ Для того, чтобы последовательность имела предел, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.

Теорема 3. /Следует из теоремы 2 и аксиомы Архимеда./ Всякая неубывающая ограниченная сверху последовательность имеет предел.

Пусть дана бесконечная десятичная дробь

$$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \qquad /2/$$

/ здесь α_0 обозначает целую часть , $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ - какие-то цифры/. Рассмотрим последовательность рациональных чисел, n -тый член которой равен $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n$. По теореме 3 эта последовательность сходится к некоторому действительному числу a . Число a считается значением бесконечной десятичной дроби /2/. Всякое действительное число можно представить в виде бесконечной десятичной дроби. При этом можно не пользоваться дробями, содержащими 9 в периоде, и тогда различным дробям будут соответствовать различные действительные числа.

Последовательность

$2,\ (1+\frac{1}{2})^2,\ \ldots,\ (1+\frac{1}{n})^n$

удовлетворяет условиям теоремы 3. Ее предел $e = 2{,}71828\ldots$ играет важную роль в математике.

§ 3.

Основные <u>свойства пределов.</u> Пусть имеются две сходящиеся последовательности:

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots,$$

$$b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots,$$

причем $\lim a_n = a$, $\lim b_n = b$. Тогда

1/ $\lim (a_n \pm b_n) = a \pm b$;

2/ $\lim (a_n b_n) = ab$;

3/ если $b \neq 0$, то $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$;

4/ если $a_n \leq b_n$ при всех n, то $a \leq b$.

<u>Несобственные пределы</u>. Говорят, что последовательность /1/ сходится к ∞ / соответственно к $+\infty$, $-\infty$ /, если для всякого $C > 0$ найдется такое натуральное число n_0, что $|a_n| > C$ / соответственно $a_n > C$, $a_n < -C$ / при всех $n \geq n_0$.

В обращении с несобственными пределами требуется осторожность. Свойства обычных пределов переносятся на них только с различными оговорками.

§ 4.

Выражение вида

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad /4/$$

называется <u>рядом</u>, а суммы

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

называют его <u>частичными суммами</u>. Если существует предел $\lim S_n = S$, то ряд /4/ называется сходящимся, а число S – его <u>суммой</u>.

Простой и в то же время важный пример ряда – сумма членов

в/ если $a_n \geq 0$ при всех n, то

$\lim \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$;

г/ если $a_n > 0$ при всех n и $a > 0$, то

$\lim \ln a_n = \ln a$.

13. Пусть $\{M_n\}$ - последовательность вписанных в окружность C выпуклых многогранников, причем центр окружности C лежит внутри каждого из них, а длина наибольшей из сторон M_n стремится к нулю при возрастании n. Доказать, что последовательности периметров и площадей многоугольников M_n сходятся и что их пределы не зависят от выбора последовательности $\{M_n\}$, удовлетворяющей указанным условиям.

14. Доказать, что если ряд

$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$

сходится, то $a_n \to 0$.

15. Доказать, что если $a_n \geq 0$ и $a_n \to 0$ (монотонно), то ряд

$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots$

сходится.

16. Пусть $|x| < 0,1$. Сколько членов ряда

$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

достаточно взять, чтобы вычислить $\frac{1}{1-x}$ с точностью до 10^{-m}?

17. Доказать, что ряд

$\frac{1^\alpha}{2} + \frac{2^\alpha}{2^2} + \ldots + \frac{n^\alpha}{2^n} + \ldots$

сходится при любом α.

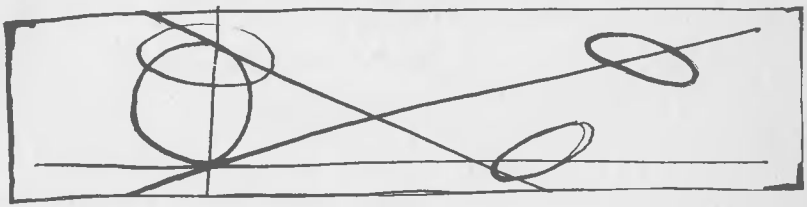
18. Вычислить $e^{0,693}$ с точностью до 0,001.

19. Доказать, что функции $a^x, \log_a x$ являются возрастающими при $a > 1$ и убывающими при $a < 1$.

20. Изобразить на одном чертеже графики функций $e^x, 10^x$ и $0,1^x$; то же для функций $\ln x$, $\lg x$ и $\log_{0,1} x$.

21. Доказать, что если $f(x)$ - монотонная функция,

определенная на всей числовой оси, и $f(x+y)=f(x)f(y)$ при всех x, y , то $a=f(1)\geqslant 0$ и $f(x)=a^x$.



ЛИТЕРАТУРА К ТЕМЕ "ПРЕДЕЛЫ"

I. Энциклопедия элементарной математики, том Ш / Функции и пределы/, Гостехиздат, 1952 / §§ 34–39,44 в первой статье В.Л.Гончарова, § 7, исключая п.38, в статье И.П.Натансона/.

2. С.И.Гельфанд, М.Л.Гервер, А.А.Кириллов, Н.Н.Константинов, А.Г.Кушниренко, Задачи по элементарной математике, Библиотека ФМШ, изд."Наука", 1965.

Исправление к лекциям по теории чисел, помещенным в 1 выпуске сборника: в определении кольца нужно потребовать дополнительно , чтобы оно содержало хотя бы один элемент, а в определении поля – содержало по крайней мере два элемента.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ШУТКА

На механико-математическом факультете придумано немало шутливых стихов и песен, в которых научные понятия и знаменитые имена встречаются в самом неожиданном контексте. Мы познакомим вас с одним таким шуточным стихотворением, распространившемся среди студентов около двадцати лет тому назад. Поводом для него послужил курс истории математики, читавшийся в университете.

Мы узнаем с этих пор,
Кто такой был Пифагор;
От нужды или со скуки.
Сочиняются науки;
Знали ль древние халдеи
Лобачевского идеи;
Что известно о Ферма
Из декартова письма;
И когда про что загнули
Братья с дядюшкой Бернулли.
Мы узнаем, чей кузен
Шарль де ла Валле Пуссен.

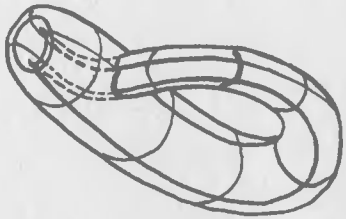
–

Интеграл изобрел Кавальери.
Производную Ньютон нам дал.
От Коши происходит критерий.
Дедекинд нам открыл идеал.
Им же созданный метод сечений
Избавляет нас от заблуждений.

–

Был в Париже знаменит
Математик Шарль Эрмит.
Говорят Анри Лебег
Был прекрасный человек,
Но не брезговал портвейном
Из бутылки, данной Клейном.

Конечно, эти стихи не обогащают русской поэзии, но из них вы можете узнать кое-что из истории математики. Скажем, о знаменитом споре между Декартом и Ферма о касательных к кривым линиям /1638/, приведшем к современному определению касательной / раньше касательная определялась,как прямая, имеющая общую точку с кривой и такая, что кривая лежит по одну сторону от нее/. Упомянуты также критерий Коши сходимости последовательности или ряда, теория идеалов Дедекинда, его же обоснование понятия действительного числа с помощью сечений в области рациональных чисел. О бутылке Клейна многие из вас слыхали. Это самопересекающаяся односторонняя поверхность. Попытайтесь представить себе ее наполненной жидкостью!



Изменения и дополнения к списку преподавателей математики в школе № 2.

8 в: Николаева Татьяна Ивановна / МГПИ, 4 курс/;
Гинцбург Галина Семеновна / МГПИ, 4 курс/.

9 а, I группа: Шленов Валерий Львович /МГУ,2 курс/ / вместо Е.И.Анно/;
Глускин Александр Михайлович /МГУ,2 курс/.

9 в, 2 группа: Зак Лев Симхович / МГУ,4 курс/ / вместо В.А.Жеребцова/;
Лабковский Валерий Аркадьевич / МГУ, 2 курс/.

I0 б, 2 группа: Монастырский Михаил Ильич / МГУ,4 курс/.

СПИСОК ПРЕПОДАВАТЕЛЕЙ ВЕЧЕРНЕЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ШКОЛЫ

Поток 8-ых классов

Группа А: Бельский Аркадий /МГУ,3 курс/, Рудаков Алексей /МГУ,3 курс/, Бердический Александр / 2 шк,9кл./, Мейерович Александр / 2 шк.,9 кл./.

Группа В: Кобринский Анатолий / МГУ,4 курс/, Родный Юрий /МГУ, 4 курс/, Дубровин Борис / 2 шк.,9 кл./, Шокуров Вячеслав / 2 шк., 9 кл./.

Группа С: Бургин Марк / МГУ, 3 курс/, Зайцев Анатолий /МГУ, 3 курс/, Житницкий Борис/МГУ,3 курс/, Раушенбах Георгий / МГУ, I курс/.

Группа D: Крючков Анатолий / МГУ, I курс/, Лобач Вячеслав / МГУ, I курс/, Подколзин Александр / 2 шк.,9 кл./, Шевяков Владимир / 2 шк.,9 кл./.

Группа Е: Новодворский Марк / МГУ, 3 курс/, Смирнов Сергей / МГУ,3 курс/.

Группа F: Песин Яков / МГУ,I курс/, Якубов Евгений /МГУ, I курс/.

Подписано к печати 4/XI-65г. Л-49652. Зак. 151[illegible].
Формат 60x80 1/16. Печ.л. 2,5. Уч.-изд.л. 1,95
Тираж 1000 экз. Цена 4 коп.

Отпечатано на ротапринтах в тип. Изд-ва МГУ
Москва. Ленгоры.